

球面三角法の簡潔かつ体系的な理解への試み

A Trial of Concise and Systematic Comprehension of Spherical Trigonometry

測地観測センター 河瀬和重
Geodetic Observation Center Kazushige KAWASE

要 旨

球面三角法については、国土地理院においても地理院地図における面積計算や、各種磁気図に採用されている斜軸投影法にその概念が用いられているが、現状入手できる資料の範囲内でその全貌を包括的に理解するのは容易ではない。本稿では、簡単な座標幾何学と、高等学校で履修する数学レベルの知識の範囲内で球面三角法の諸公式を導出し、その体系的な理解への道筋構築を試みる。

1. はじめに

現在国土地理院においては、地理院地図の一機能である面積算出において回転楕円体面から球面に正積投影した後の球面三角形の面積計算に L'Huilier の式が用いられている（国土地理院，2017）。また、各種磁気図（例えば、国土地理院，2016）に採用されている斜軸メルカトル図法への投影計算において、真の極軸に対して傾いた見かけ上の極軸が設定された座標系における球面座標を算出する必要がある、いずれの際にも球面三角法の知識を必要としている。

しかしながら、日本語で書かれた球面三角法を解説する書物は希少かつ入手困難であるばかりでなく、これらの導出過程を一からフォローするには当該書物を複数参照しても非常に複雑で困難を伴い、外国の書物（例えば、Todhunter and Leatham, 1914）に頼らざるを得ない状況である。

本稿では、幾何学の知識としては球面極座標と三次元直交座標との関係のみを、代数学の知識としては高等学校で履修する三角関数の加法定理（及びそこから派生する和積公式）並びに初等的な比例式の関係のみを用いて、球面三角法の主だった諸公式を導出することにより、その簡潔かつ体系的な理解に資することを試みる。

2. 球面三角法における諸公式

以下では、図-1 に示す幾何学的配置及び設定変数の下で、関係する諸公式をまず明示し、それから一つひとつ公式を導出していくスタイルを採ることとする。なお、2.4 及び 2.5 については、図-1 に示される球面三角形の頂角及び対辺の關係に相当する α, β, γ 及び a, b, c の変数の役割を cyclic に入れ替えて得られる自明な式は殊更に表記しない。

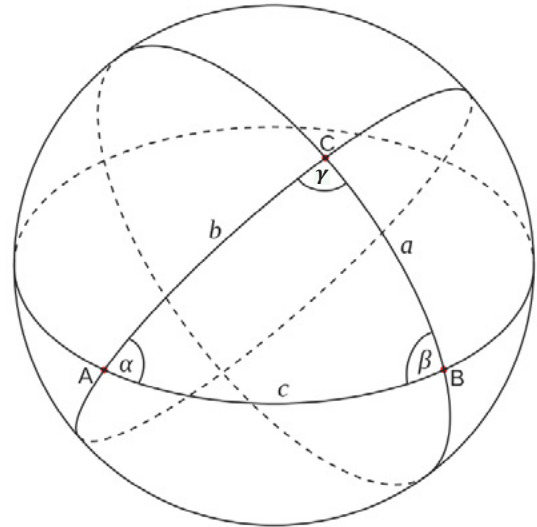


図-1 以後の議論の対象とする球面三角形の幾何学的配置及び設定する変数。Wikimedia Commons のコンテンツに一部加筆。なお、特に断らない限り球は単位球（半径 1）とする。

2.1 余弦法則

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

2.2 正弦法則

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

2.3 正接法則

$$\frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\tan \frac{a - b}{2}}{\tan \frac{a + b}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{\beta - \gamma}{2}}{\tan \frac{\beta + \gamma}{2}} = \frac{\tan \frac{b - c}{2}}{\tan \frac{b + c}{2}}$$

$$\frac{\tan \frac{\gamma - \alpha}{2}}{\tan \frac{\gamma + \alpha}{2}} = \frac{\tan \frac{c - a}{2}}{\tan \frac{c + a}{2}}$$

2.4 半角の公式

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ として,}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

2.5 Delambre の公式 (又は Gauß の公式)

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi \text{ として,}$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a - b}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a + b}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

2.6 球面三角形の面積

図-1 における単位球の球面三角形 ABC の面積を E とする¹と、E は α, β, γ 又は a, b, c いずれかの変数の組についての対称関数として表すことができる。

E を表す式は幾つか提案されているが、以下に典型的な例を示す。

2.6.1 Girard の式

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

上式を見て分かるとおり、平面三角形では 0 になる (∵ 平面三角形の 3 頂角の和は 2 直角) はずの量が、球面三角形においては有限値となる。このことが、E を「球過量」(Spherical Excess) と称する所以となっている。

2.6.2 L'Huilier の式

$$E = 4 \tan^{-1} \sqrt{\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}}$$

3. 諸公式の導出

以下では、2.において示した各式の導出を行っていくが、導出の順番は 2.での表記順と若干異なっていることに注意されたい。

3.1 余弦法則の導出

図-2 のように、単位球の中心を座標原点とし、球面三角形の 1 つの頂点が z 軸を通るように、一般性を失うことなく三次元直交座標系を設定することができる。そのとき、単位球面上の点 P 及び Q の座標は、それぞれ次のように表される：

$$P(\sin \theta_p \cos \varphi_p, \sin \theta_p \sin \varphi_p, \cos \theta_p)$$

$$Q(\sin \theta_q \cos \varphi_q, \sin \theta_q \sin \varphi_q, \cos \theta_q)$$

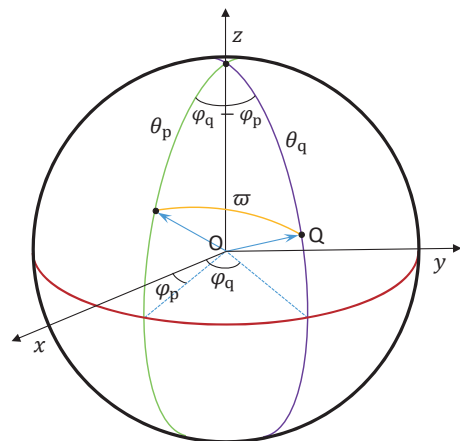


図-2 球面三角法の余弦法則を導出するための幾何学的配置及び使用する変数。

ここで、単位ベクトル \vec{OP} 及び \vec{OQ} の内積を“幾何計量的表現”²と“座標代数的表現”³の 2 通りの表現で表すと、以下のような等式が得られる：

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \underbrace{|\vec{OP}|}_1 \underbrace{|\vec{OQ}|}_1 \cos w$$

¹半径が R の球の場合は、面積は ER^2 となる。

²各ベクトルの絶対値の積と、各ベクトルの成す角の余弦との積

³各ベクトルの各成分同士の積の総和

$$= \sin \theta_p \sin \theta_q \cos(\varphi_q - \varphi_p) + \cos \theta_p \cos \theta_q$$

上式を図-2 で設定されている変数から図-1 で設定されている変数へ対応付けると, 2.1 の第 3 式が得られる。

3.2 半角の公式の導出

2.1 の第 1 式から,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

を得る。ここから, 2.4 の各式:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos(b - c) - \cos a}{\cos a - \cos(b + c)}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin s \sin(s - a)}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \tan \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}} \end{aligned}$$

が得られる。ここで, 三角関数の和積公式:

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{B - A}{2}$$

を用いている。

3.3 Delambre の公式の導出

例として, 2.5 の第 1 式左辺を展開し, 前節にて得られたばかりの半角の公式を適用すると,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{c}{2} &= \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \cos \frac{c}{2} \\ &= \frac{\sin(s - b) + \sin(s - a)}{\frac{\sin c}{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}}} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - c)}{\sin a \sin b}} \cos \frac{c}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a - b}{2}}{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{c}{2} \\ &= \cos \frac{a - b}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

となり右辺が得られる。ここで, 三角関数の和積公式:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

を用いている。第 2 式以降も同様に示すことができる。

3.4 正接法則の導出

前節で得られたばかりの 2.5 の各式について, 第 2 式と第 3 式を辺々掛け合わせたものを, 第 1 式と第 4 式を辺々掛け合わせたもので辺々割ると, 2.3 の第 1 式が得られる。特に難しい数式処理は必要としない。

3.5 正弦法則の導出

前節で得られたばかりの 2.3 の第 1 式について, 三角関数の和積公式:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \cot \frac{A + B}{2} \tan \frac{A - B}{2}$$

を用いると,

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$$

なる等式を得る。さらに, 比例式に関して成り立つ合除法の理 (Componendo and Dividendo):

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \frac{p - q}{p + q} = \frac{r - s}{r + s}$$

を用いると, 当該等式は

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

と変形され、ここから直ちに 2.2 の第 1 式：

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b}$$

を得る。

3.6 球面三角形の面積の導出

3.6.1 Girard の式の導出

2.6.1 の式の導出については、再び図-1 に目を転ずる必要がある。図-1 の上半球は、図-3 に示すような蜜柑の房状立体であって、中心角がそれぞれ α, β, γ となるもの 3 つで概ね構成されており、その側面積の和は上半球面の面積に球面三角形 2 つ分（図-1 の手前で重複する分と奥側ではみ出る合同図形の分）の面積を加えたものに等しくなることから説明できる。



図-3 桜島小蜜柑の果皮内に存する房の集合。Wikimedia Commons のコンテンツから抜粋。蜜柑を単位球に見立てた際の、中心角 α を成す房状立体の側面積は 2α である。

3.6.2 L'Huilier の式の導出

2.5 の橙と緑に着色した等式について、仮置きした変数 ε は球過量 E に他ならないことが 3.6.1 から示されたので、 ε を E に置き換えつつ 3.5 で紹介し

た合除比の理を用いると、

$$\frac{\cos \frac{\gamma - E}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma - E}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a - b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{\gamma - E}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma - E}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a + b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

を得る。ここで、三角関数の和積公式：

$$\frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A + B}{2} \tan \frac{B - A}{2}$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \cot \frac{A + B}{2} \tan \frac{A - B}{2}$$

により、上述の式はそれぞれ

$$\tan \frac{2\gamma - E}{4} \tan \frac{E}{4} = \tan \frac{s - b}{2} \tan \frac{s - a}{2}$$

$$\cot \frac{2\gamma - E}{4} \tan \frac{-E}{4} = \tan \frac{s}{2} \tan \frac{-(s - c)}{2}$$

と変形できる。これら 2 式を辺々掛け合わせて符号反転し、両辺の正の平方根を取ることにより、

$$\tan \frac{E}{4} = \sqrt{\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s - a}{2} \tan \frac{s - b}{2} \tan \frac{s - c}{2}}$$

が得られ、2.6.2 の式が示される。

4. まとめ

以上見てきたとおり最低限の予備知識で球面三角法の主要な法則及び公式の導出を行うことができた。なお、本稿では正弦余弦法則、余接法則及び Napier の式は紹介しなかったが、いずれもこれまで紹介した法則及び公式の代入変形や等式の辺々処理の程度で導出できることを付記しておく。

(公開日：令和元年 5 月 17 日)

参考文献

- 国土地理院 (2017) : 地理院地図の計測機能 (面積), https://maps.gsi.go.jp/help/pdf/calc_area.pdf (accessed 14 Feb. 2019).
- 国土地理院 (2016) : 磁気図 (偏角) 2015.0 年値 (国土地理院技術資料 B1-No. 71), <http://www.gsi.go.jp/common/000148084.pdf> (accessed 14 Feb. 2019).
- Todhunter, I. and J. G. Leatham (1914): *Spherical Trigonometry*, Macmillan & Co. Ltd., London.