地心緯度を介した正角緯度と地理（測地）緯度との関係について
On the Relation between the Conformal Latitude and the Geographical (Geodetic) Latitude through the Geocentric Latitude

基本図情報部　河瀬和重
National Mapping Department　KAWASE Kazushige

要　旨

現行の公共測量に係る作業規程の準則においては，平面直角座標から経緯度を得る計算式に正角緯度から地理（測地）緯度を得る級数展開式が提示されているが，展開係数の大きさの関係から展開次数が多くなっている．本稿では，正角緯度と数値的に類似している地心緯度を経由させることによって，展開次数を少なくするとともに，より簡素な展開係数とすることを試行した結果を報告する．

1. はじめに

現行の公共測量に係る作業規程の準則（平成 20 年国土交通省告示第 413 号．最終改正令和 2 年国土交通省告示第 461 号）の計算式集 2.9「座標を変換して経緯度，子午線収差角及び縮尺係数を求める計算」においては，該当する地理（測地）緯度を中間変数としての正角緯度を用いた級数展開式により求めるような体裁を採っているが，展開係数の大きさの関係から，地球楕円体の第三扁平率 n の 6 次（大きさにして 2.2×10^{-17} の程度）までの展開項を用いており，その取扱いにおいて少なからず煩雑となっている．

本稿では，更なる中間変数として正角緯度と数値的に類似しており，かつ，正角緯度と比較して地理（測地）緯度と単純な関係にある地心緯度を導入することにより，計算精度を損なうことなく展開次数を少なくするとともに，展開係数そのものも簡素化することを試行した結果を報告する．

2. 正角緯度と地心緯度について

正角緯度 (conformal latitude) 及び地心緯度 (geocentric latitude) は，地球を回転楕円体とみなすことにより我々が通常用いる地理（測地）緯度から多少の変化を生ずる，派生的・補助的な緯度群の一端を成している．

図-1 は，そうした派生的・補助的な緯度群の地理（測地）緯度からの差を示したグラフである．図から，正角緯度と地心緯度は数値的にほとんど等しいことが見て取れ，図のグラフ縦軸単位である“分”の角度レベルでは全く見分けがつかないほどに値が類似していることが分かる．

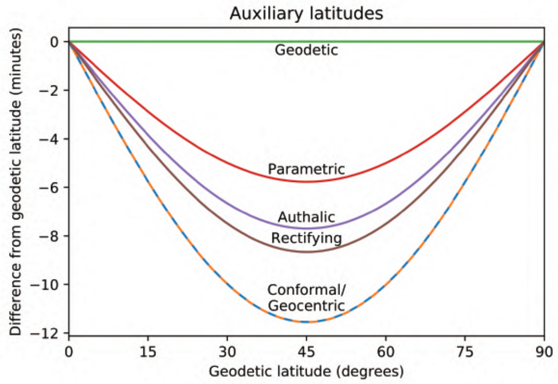

図-1　地球を回転楕円体とみなすことにより生ずる様々な補助的緯度の，地理（測地）緯度からの差を示すグラフ．Wikimedia Commons のコンテンツから抜粋．

以下では，正角緯度及び地心緯度それぞれの定義及び地理（測地）緯度 φ との数式的関係について整理確認しておく．

2.1 正角緯度

正角緯度 χ は，回転楕円体から球面に等角投影させた場合の相当緯度として定義される．その表式は，河瀬（2011）の (1) 式に示したとおり，次式のように表される：

$$\chi = \mathrm{gd}\left[\mathrm{gd}^{-1}\varphi - \frac{2\sqrt{n}}{1+n}\tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin\varphi\right)\right] \qquad \text{(i)}$$

逆に χ から φ を求めるには，明示的な数式によることはできず，級数展開の形式をとらざるを得ないが，その結果は，河瀬（2011）の (13) 式及び (22) 式を参照されたい．同 (22) 式を念のため再掲しておく：

$$\delta_1 = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \frac{26}{45}n^5 - \frac{2854}{675}n^6,$$
$$\delta_2 = \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \frac{2704}{315}n^5 + \frac{2323}{945}n^6,$$
$$\delta_3 = \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 - \frac{1262}{105}n^5 + \frac{73814}{2835}n^6,$$

$$\delta_4 = \frac{4279}{630}n^4 - \frac{332}{35}n^5 - \frac{399572}{14175}n^6,$$
$$\delta_5 = \frac{4174}{315}n^5 - \frac{144838}{6237}n^6,$$
$$\delta_6 = \frac{601676}{22275}n^6 \qquad \text{(ii)}$$

(ii) 式から分かるとおり，n^6 の項の展開係数がところによっては20を超える数値であり，通常の計算機が有する計算精度に影響するか否かという微妙なところにある．そのため，現行の作業規程の準則においては念のために n^6 の項まで採用しているという状況である．

2.2 地心緯度

図-2 に示すように，ある地点の地心緯度 ψ はその名のとおり地球中心から当該地点を見込む，地球長半径との成す角として定義される．

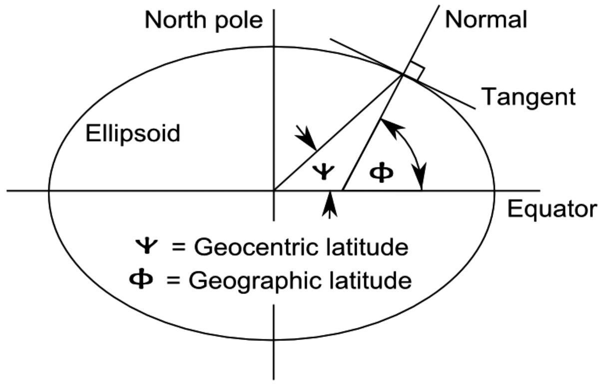

図-2　地心緯度と地理（測地）緯度との幾何学的関係．Wikimedia Commons のコンテンツから抜粋．

初等幾何的な考察（楕円の方程式を満たすある地点について，当該地点の接線の傾きと法線の傾きの積が -1 になるという事実等）により，ψ は地球楕円体の離心率 e を用いて次のように表される：

$$\psi = \tan^{-1}\left((1-e^2)\tan\varphi\right) = \tan^{-1}\left[\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \tan\varphi\right] \qquad \text{(iii)}$$

上式の最後の変形は，$e^2 = 4n/(1+n)^2$ という関係を用いた．(iii) 式から，

$$\varphi = \tan^{-1}\left[\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 \tan\psi\right] \qquad \text{(iv)}$$

が得られる．一方，正接関数の加法定理に (iii) 式の結果を組み合わせることにより，

$$\tan(\psi-\varphi) = \frac{\tan\psi - \tan\varphi}{1+\tan\psi\tan\varphi} = \frac{(1-e^2)\tan\varphi - \tan\varphi}{1+(1-e^2)\tan^2\varphi} = \frac{-e^2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi - e^2\tan^2\varphi} = \frac{-e^2\sin\varphi\cos\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} = \frac{-2n\sin 2\varphi}{1+2n\cos 2\varphi + n^2} \qquad \text{(v)}$$

と変形できる．(v) 式から，3. で計算処理を実施する際に用いる ψ の表式として

$$\psi = \varphi + \tan^{-1}\left(\frac{-2n\sin 2\varphi}{1+n^2+2n\cos 2\varphi}\right) = \varphi + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-2n}{1+n^2}\sin 2\varphi}{1-\frac{-2n}{1+n^2}\cos 2\varphi}\right) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{1+n^2}\right)^k \frac{\sin 2k\varphi}{k} = \varphi + s(\varphi) \qquad \text{(vi)}$$

を得ることができる．上式に現れる逆正接関数から Fourier 正弦級数への変形については，森口ほか（1957）を参照されたい．なお，3. での計算処理では，この Fourier 正弦級数を n について必要となる次数だけ展開したものを $s(\varphi)$ とおいている．

3. 地心緯度の正角緯度による表式の導出

2.1 及び 2.2 で得られた結果を用いて ψ を χ で表すことを試みる．すなわち，河瀬（2011）の (30) 式から Lagrange inversion theorem（Lagrange, 1770）により χ を φ で表した Fourier 正弦級数を得た後，さらに (vi) 式で得られた φ の関数 $\psi(\varphi) = \varphi + s(\varphi)$ について改めて Lagrange inversion theorem を適用する．

実際の計算整理に当たっては，フリーの数式処理システム Maxima（The Maxima Group, 2021）を利用した．図-3 に，n^6 の項までの計算を実行した際の画面キャプチャを示す．

```
(%i1) g ( p ) : = taylor ( 2 · sqrt ( n ) / ( 1 + n ) · atanh ( 2 · sqrt ( n ) / ( 1 + n ) · sin ( p ) ) , n , 0 , 6 ) ;
```

$$g(p):=\mathrm{taylor}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\,\mathrm{atanh}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin(p)\right),n,0,6\right)$$

```
(%i2) s ( p ) : = taylor ( sum ( ( − 2 · n / ( 1 + n ^ 2 ) ) ^ k · sin ( 2 · k · p ) / k , k , 1 , 6 ) , n , 0 , 6 ) ;
```

$$s(p):=\mathrm{taylor}\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\left(\frac{(-2)n}{1+n^2}\right)^k\sin(2kp)}{k},n,0,6\right)$$

```
(%i3) expand ( trigrat ( taylor ( g ( p ) · cos ( p ) + cos ( p ) · diff ( g ( p ) ^ 2 · cos ( p ) , p ) / 2 !
      + cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( g ( p ) ^ 3 · cos ( p ) , p ) , p ) / 3 !
      + cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( g ( p ) ^ 4 · cos ( p ) , p ) , p ) , p ) / 4 !
      + cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( g ( p ) ^ 5 · cos ( p ) , p ) , p ) , p ) , p ) / 5 !
      + cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( cos ( p ) · diff ( g ( p ) ^ 6 · cos ( p ) , p ) , p ) , p ) , p ) , p ) / 6 !
    , n , 0 , 6 ) ) ) ;
```

$$\frac{601676n^6\sin(12p)}{22275}-\frac{144838n^6\sin(10p)}{6237}+\frac{4174n^5\sin(10p)}{315}-\frac{399572n^6\sin(8p)}{14175}-\frac{332n^5\sin(8p)}{35}+\frac{4279n^4\sin(8p)}{630}+\frac{73814n^6\sin(6p)}{2835}-\frac{1262n^5\sin(6p)}{105}-\frac{136n^4\sin(6p)}{35}+\frac{56n^3\sin(6p)}{15}+\frac{2323n^6\sin(4p)}{945}+\frac{2704n^5\sin(4p)}{315}-\frac{227n^4\sin(4p)}{45}-\frac{8n^3\sin(4p)}{5}+\frac{7n^2\sin(4p)}{3}-\frac{2854n^6\sin(2p)}{675}+\frac{26n^5\sin(2p)}{45}+\frac{116n^4\sin(2p)}{45}-2n^3\sin(2p)-\frac{2n^2\sin(2p)}{3}+2n\sin(2p)$$

```
(%i4) expand ( trigrat ( taylor ( sum ( diff ( ( − % ) ^ k , p , k − 1 ) / k ! , k , 1 , 6 ) , n , 0 , 6 ) ) ) ;
```

$$\frac{444337n^6\sin(12p)}{155925}+\frac{109598n^6\sin(10p)}{31185}-\frac{734n^5\sin(10p)}{315}-\frac{24832n^6\sin(8p)}{14175}-\frac{12n^5\sin(8p)}{5}+\frac{1237n^4\sin(8p)}{630}-\frac{12686n^6\sin(6p)}{2835}+\frac{8n^5\sin(6p)}{5}+\frac{34n^4\sin(6p)}{21}-\frac{26n^3\sin(6p)}{15}-\frac{1522n^6\sin(4p)}{945}+\frac{904n^5\sin(4p)}{315}-\frac{13n^4\sin(4p)}{9}-\frac{16n^3\sin(4p)}{15}+\frac{5n^2\sin(4p)}{3}+\frac{4642n^6\sin(2p)}{4725}+\frac{32n^5\sin(2p)}{45}-\frac{82n^4\sin(2p)}{45}+\frac{4n^3\sin(2p)}{3}+\frac{2n^2\sin(2p)}{3}-2n\sin(2p)$$

```
(%i5) expand ( trigrat ( taylor ( s ( p ) + sum ( diff ( ( − % ) ^ k · ( 1 + diff ( s ( p ) , p ) ) , p , k − 1 ) / k ! , k , 1 , 6 ) , n , 0 , 6 ) ) ) ;
```

$$\frac{335882n^6\sin(12p)}{155925}-\frac{2362n^6\sin(10p)}{891}+\frac{52n^5\sin(10p)}{45}-\frac{34712n^6\sin(8p)}{14175}-\frac{80n^5\sin(8p)}{63}+\frac{83n^4\sin(8p)}{126}+\frac{9446n^6\sin(6p)}{2835}-\frac{46n^5\sin(6p)}{35}-\frac{24n^4\sin(6p)}{35}+\frac{2n^3\sin(6p)}{5}+\frac{61n^6\sin(4p)}{135}+\frac{68n^5\sin(4p)}{45}-\frac{23n^4\sin(4p)}{45}-\frac{4n^3\sin(4p)}{15}+\frac{n^2\sin(4p)}{3}-\frac{3658n^6\sin(2p)}{4725}+\frac{2n^5\sin(2p)}{9}+\frac{4n^4\sin(2p)}{9}-\frac{2n^3\sin(2p)}{3}-\frac{2n^2\sin(2p)}{3}$$

Created with wxMaxima.

The source of this Maxima session can be downloaded here.

図-3　数式処理ソフト“Maxima”を用いて計算した結果画面の抜粋.

図-3 の（%i5）で得られた結果が，ψ を χ で表す計算式のうち Fourier 正弦級数の部分の n^6 の項までの計算結果に相当する．この結果を用いて今回提案する計算式の全体を整理し直すと，次式のとおりとなる：

$$\psi = \chi + \sum_{j=1}^{5} \delta_j \sin 2j\chi \qquad \text{(vii)}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -\frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3}n^3 + \frac{4}{9}n^4 + \frac{2}{9}n^5, \\
\delta_2 &= \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{15}n^3 - \frac{23}{45}n^4 + \frac{68}{45}n^5, \\
\delta_3 &= \frac{2}{5}n^3 - \frac{24}{35}n^4 - \frac{46}{35}n^5, \\
\delta_4 &= \frac{83}{126}n^4 - \frac{80}{63}n^5, \\
\delta_5 &= \frac{52}{45}n^5
\end{aligned} \qquad \text{(viii)}$$

4. 導出結果の評価及び活用

(viii) 式を (ii) 式と比較すると, (ii) 式の規約分数係数の桁数は最大 6 桁（n^5 までの項に限っても 4 桁が 4 箇所）であるのに対し，(viii) 式の規約分数係数は 3 桁がわずかに 1 箇所認められるのみである．また念のために計算した n^6 の項の係数を確認すると，図-3 の（%i5）では高々4 以下に留まっており，通常の計算機が有する計算精度では無視してよい程度となっていることが分かる．

また，(viii) 式の δ_1 には n の 1 次の項は含まれていないことが認められ，図-1 で確認できるとおり ψ と χ の値が極めて類似していることを改めて示唆する非常に興味深い結果となっている．

なお，(vii) 式の結果からある χ に相当する所望の地理（測地）緯度 φ を求めるには，$\tan\psi$ を得た後に (iv) 式によりその定数倍の逆正接を求める必要があるが，投影の増大率を求める際に結局のところ $\tan\varphi$（派生して $\tan\psi$）を必要とする場面が出てくるため，計算コストを勘案しても全体としてより簡潔かつ効率的な計算手法を得たことになる．

以上導出した計算式について，河瀬（2011）で既に提示した計算式を改善するには，(13) 式を (vii) 式及び (iv) 式に，(22) 式を (viii) 式に入れ替えるとともに，投影の増大率を得る (16) 式について (iii) 式又は (iv) 式から派生した，

$$\frac{1+n}{1-n}\tan\psi = \frac{1-n}{1+n}\tan\varphi \qquad \text{(ix)}$$

の関係に基づいて該当部分を入れ替えることによって実現できる．

5. プログラム応用例

次ページ以降に，河瀬（2011）同様，導出した計算式の正確性の確認を目的として，JavaScript を用いて HTML ファイル上にプログラミングしたソースコードを掲げる．示されているソースコードをそのまま HTML ファイルとして保存し，適当な Web ブラウザで参照すれば，特にソフトウェアを必要とせずに計算を実行する．

河瀬（2011）で提示した 2 つの HTML ファイルで構成されるプログラム例と比較して，1 つの HTML ファイルで経緯度⇔平面直角座標の往復変換をボタン操作（マウスオーバー）で可能とするとともに，Fourier 正弦級数の計算に Clenshaw のアルゴリズム（Clenshaw, 1955）を採用するなど，多少の改善は施してきているが，あくまでもこれまで導出してきた計算式の正確性の確認だけを目的として即席で作成したものであることには変わりない．そのため，クロスサイトスクリプティングへの対処等，情報セキュリティを勘案した実用的なものにするためには更なる改善が必要であることは改めて言及しておきたい．

なお，河瀬（2011）で提示したプログラム例のソースコードについて既に批評（@Gatz, 2018）がなされていることは承知しており，今回が必要な措置を執るちょうどよいタイミングではあったのであるが，筆者の能力不足により残念ながら見送らざるを得なかった．

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="ja">
<head>
<meta charset="UTF-8">
<title>Kr&uuml;ger の式により（φ, λ ⇔ X, Y）の座標換算を行うページ</title>
<script type="text/javascript">
// 2015-06-15 初版作成 by KAWASE Kazushige
// 2016-06-08 正角緯度 → 地理緯度の計算に Clenshaw's algorithm を採用
// 2021-07-28 正角緯度 → 地心緯度 → 地理緯度の順に計算を変更
function sinh(x) { return (Math.abs(x) > 1e-3) ? 0.5*(Math.exp(x)-Math.exp(-x)) : x*(x*x/6+1) }
function cosh(x) { return 0.5*(Math.exp(x)+Math.exp(-x)) }
function arctanh(x) { return 0.5*Math.log((1+x)/(1-x)) }

a=6378137; rf=298.257222101; m0=0.9999; s2r=Math.PI/648000; n=0.5/(rf-0.5)
n15=1.5*n; nsq=n*n; e2n=2*Math.sqrt(n)/(1+n); ep2n=(1-n)/(1+n)
anh=0.5*m0*a/(1+n); ra=2*anh*(nsq*nsq*nsq/256+nsq*nsq/64+nsq/4+1)
jt=3; jt2=2*jt; alp=[]; beta=[]; dlt=[]; u=[]; e=[]; s=[0]; t=[]; marc=[]

// 展開パラメータの事前入力
alp[1]=(1/2+(-2/3+(5/16+(41/180-127/288*n)*n)*n)*n)*n
alp[2]=(13/48+(-3/5+(557/1440+281/630*n)*n)*n)*nsq
alp[3]=(61/240+(-103/140+15061/26880*n)*n)*n*nsq
alp[4]=(49561/161280-179/168*n)*nsq*nsq
alp[5]=34729/80640*n*nsq*nsq
beta[1]=(1/2+(-2/3+(37/96+(-1/360-81/512*n)*n)*n)*n)*n
beta[2]=(1/48+(1/15+(-437/1440+46/105*n)*n)*n)*nsq
beta[3]=(17/480+(-37/840-209/4480*n)*n)*n*nsq
beta[4]=(4397/161280-11/504*n)*nsq*nsq
beta[5]=4583/161280*n*nsq*nsq
dlt[1]=(-2/3+(-2/3+(4/9+2/9*n)*n)*n)*nsq
dlt[2]=(1/3+(-4/15+(-23/45+68/45*n)*n)*n)*nsq
dlt[3]=(2/5+(-24/35-46/35*n)*n)*n*nsq
dlt[4]=(83/126-80/63*n)*nsq*nsq
dlt[5]=52/45*n*nsq*nsq
u[dlt.length+1]=u[dlt.length]=0

// 平面直角座標の座標系原点の緯度の 2 倍を度単位で、経度－100° を 5 分単位で格納
b0=[0,66,66,72,66,72,72,72,72,72,80,88,88,88,52,52,52,52,40,52]
l0=[0,354,372,386,402,412,432,446,462,478,490,483,507,531,504,330,288,372,432,648]

// 赤道から各座標系原点までの子午線弧長（×縮尺係数）を格納
for(ep=1,k=jt; k; k--) { ep*=e[k]=n15/k-n; e[k+jt]=n15/(k+jt)-n }
for(nmb=b0.length; --nmb; ) {
   b2=b0[nmb]*3600*s2r; dc=2*Math.cos(b2); s[1]=Math.sin(b2); t[1]=-3*s[1]
   for(i=1; ++i<=jt2; ) { s[i]=dc*s[i-1]-s[i-2]; t[i]=(1/i-4*i)*s[i] }
   for(sum=0,c1=ep,j=jt; j; j--) {
      for(c2=b2,c3=2,m=0,l=j; l; ) { c2+=(c3/=e[l--])*t[++m]+(c3*=e[2*j-l])*t[++m] }
      sum+=c1*c1*c2; c1/=e[j]
   }
   marc[nmb]=anh*(sum+b2)
```

```
}

function BL2XY() {
// 与件入力
   num=document.BLXY.NUM.value; b=document.BLXY.B.value; l=document.BLXY.L.value

   brad=eval(b.substr(0,2)*3600+b.substr(2,2)*60+b.substr(4)*1)*s2r
   lmin=eval(l.substr(1,2)*12+l.substr(3,1)*2); lsec=eval(l.substr(4,1)*60+l.substr(5)*1)

// 実際の計算実行部分
   sb=Math.sin(brad); nb=ep2n*Math.tan(brad)
   dl=(lsec+(lmin-l0[num])*300)*s2r; sdl=Math.sin(dl); cdl=Math.cos(dl)
   tchi=sinh(arctanh(sb)-e2n*arctanh(e2n*sb)); cchi=Math.sqrt(1+tchi*tchi)
   xip2=2*Math.atan2(tchi, cdl); etap2=2*arctanh(sdl/cchi)
   for(xid=etad=sgm=tau=0,j=alp.length; --j; ) {
      alsin=alp[j]*Math.sin(j*xip2); alcos=alp[j]*Math.cos(j*xip2)
      xid+=alsin*cosh(j*etap2); etad+=alcos*sinh(j*etap2)
      sgm+=j*alcos*cosh(j*etap2); tau+=j*alsin*sinh(j*etap2)
   }

   sgm*=2; tau*=2; sgm++; x=ra*(xid+0.5*xip2)-marc[num]; y=ra*(etad+0.5*etap2)
   m=ra/a*Math.sqrt((sgm*sgm+tau*tau)/(tchi*tchi+cdl*cdl)*(1+nb*nb))
   sgn=((dg=Math.atan2(tau*cchi*cdl+sgm*tchi*sdl, sgm*cchi*cdl-tau*tchi*sdl)/s2r)<0)

// 角度の度分秒分離
   gdeg=Math.floor(dg/3600)+sgn; gmin=Math.floor(dg/60-gdeg*60)+sgn
   gsec=Math.abs(dg-gdeg*3600-gmin*60).toFixed(9)

// 結果表示
   document.BLXY.X.value=x.toFixed(9); document.BLXY.Y.value=y.toFixed(9)
   document.BLXY.M.value=m.toFixed(15)
   document.BLXY.G.value=(sgn?"-":"+") + Math.abs(gdeg) + "°　" + Math.abs(gmin) + "′　" + gsec
}

function XY2BL() {
// 与件入力
   num=document.BLXY.NUM.value; xbar=document.BLXY.X.value/ra; ybar=document.BLXY.Y.value/ra

// 実際の計算実行部分
   for(xi2=2*(xbar+marc[num]/ra),eta2=2*ybar,xipd=etapd=sgmp=taup=0,j=beta.length; --j; ) {
      besin=beta[j]*Math.sin(j*xi2); becos=beta[j]*Math.cos(j*xi2)
      xipd-=besin*cosh(j*eta2); etapd-=becos*sinh(j*eta2)
      sgmp-=j*becos*cosh(j*eta2); taup+=j*besin*sinh(j*eta2)
   }

   xip=xipd+0.5*xi2; etap=etapd+0.5*eta2; sgmp*=2; taup*=2; sgmp++
   sxip=Math.sin(xip); cxip=Math.cos(xip); setap=sinh(etap); cetap=cosh(etap)
   chi2=2*Math.asin(sxip/cetap); dc=2*Math.cos(chi2)
   for(j=dlt.length; --j; ) { u[j]=dc*u[j+1]-u[j+2]+dlt[j] }
   tc=Math.tan(u[1]*Math.sin(chi2)+0.5*chi2)/ep2n
```

```
  db=Math.atan2(tc, ep2n)/s2r; l=l0[num]*300+Math.atan2(setap, cxip)/s2r
  m=ra/a*Math.sqrt((cxip*cxip+setap*setap)/(sgmp*sgmp+taup*taup)*(1+tc*tc))
  sgn=((dg=Math.atan2(taup*cxip*cetap+sgmp*sxip*setap, sgmp*cxip*cetap-taup*sxip*setap)/s2r)<0)

// 角度の度分秒分離
  bdeg=Math.floor(db/3600); bmin=Math.floor(db/60-bdeg*60); bsec=db-bdeg*3600-bmin*60
  ldeg=Math.floor(l/3600); lmin=Math.floor(l/60-ldeg*60); lsec=l-ldeg*3600-lmin*60
  gdeg=Math.floor(dg/3600)+sgn; gmin=Math.floor(dg/60-gdeg*60)+sgn
  gsec=Math.abs(dg-gdeg*3600-gmin*60).toFixed(9)

// 結果表示
  document.BLXY.B.value=(bdeg*10000+bmin*100+bsec).toFixed(9)
  document.BLXY.L.value="1" + (ldeg*10000+lmin*100+lsec).toFixed(9)
  document.BLXY.M.value=m.toFixed(15)
  document.BLXY.G.value=(sgn?"-":"+") + Math.abs(gdeg) + "°  " + Math.abs(gmin) + "′  " + gsec
}
</script>
</head>
<body style="font-size: 14pt">
<form name="BLXY">
座標系番号：<select name="NUM">
<option value="1">1系</option><option value="2">2系</option>
<option value="3" selected>3系</option><option value="4">4系</option>
<option value="5">5系</option><option value="6">6系</option><option value="7">7系</option>
<option value="8">8系</option><option value="9">9系</option><option value="10">10系</option>
<option value="11">11系</option><option value="12">12系</option><option value="13">13系</option>
<option value="14">14系</option><option value="15">15系</option><option value="16">16系</option>
<option value="17">17系</option><option value="18">18系</option><option value="19">19系</option>
</select>
 増大率：<input type="text" size="19" name="M">
 子午線収差角：<input type="text" size="21" name="G"><br/>
緯度（ ddmmss.ssss形式）<input type="text" size="30" name="B">
    Ｘ：<input type="text" size="30" name="X" value="-207462.646"><br/>
経度（dddmmss.ssss形式）<input type="text" size="30" name="L">
    Ｙ：<input type="text" size="30" name="Y" value="-127394.933"><br/>
<span style="margin-right: 17em"></span>
<input type="button" value="φ, λ &rArr; Ｘ, Ｙ" onmouseover="BL2XY()">  <input type="reset">
<input type="button" value="φ, λ &lArr; Ｘ, Ｙ" onmouseover="XY2BL()">
</form>
</body>
</html>
```

6. まとめ

河瀬（2011）では，中央子午線からの経度差について冪級数展開する手法を採る，従来の経緯度⇔平面直角座標に関する相互換算式の取扱いの効率性を大幅に改善することができたと認識しているが，中間変数である正角緯度から地理（測地）緯度への換算式の煩雑さが唯一残る課題として気になっていたところであった．

本稿において，正角緯度と数値的に類似している地心緯度を更なる中間変数として経由させることにより，微々たる計算コストの負担のみで現行用いられている計算式の一層の簡素化を実施できることが確認できた．

今回提示したプログラムが様々な分野で活用され

ることを願いつつ，関係諸氏の多方面からの更なる改善に期待したい.

（公開日：令和 3 年 9 月 13 日）

参 考 文 献

@Gatz (2018): 数値計算界に伝えたいオブジェクト指向構文とその用法，技術情報共有サイト「Qiita」投稿記事，https://qiita.com/Gatz/items/2f017aa3f6be42c4539e (accessed 30 Jul. 2021).

Clenshaw, C. W. (1955): A note on the summation of Chebyshev series, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 9 (51), 118–120, doi:10.1090/S0025-5718-1955-0071856-0 (accessed 30 Jul. 2021).

河瀬和重（2011）: Gauss-Krüger 投影における経緯度座標及び平面直角座標相互間の座標換算についてのより簡明な計算方法，国土地理院時報，121，109–124，https://www.gsi.go.jp/common/000061216.pdf (accessed 30 Jul. 2021).

Lagrange, J. L. (1770): Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des series, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres: Année 1768, 251–326, in Œuvres de Lagrange, 3 (Gauthier-Villars, Paris, 1869), pp. 5–73, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229222d/f6 (accessed 30 Jul. 2021).

森口繁一，宇田川銈久，一松信（1957）: 数学公式II—級数・フーリエ解析，岩波書店，東京，148 or 252.

The Maxima Group (2021): Maxima, a Computer Algebra System, Version 5.45.1, https://maxima.sourceforge.io/ (accessed 27 Jul. 2021).